

Đáp án chi tiết đề thi thử cụm 5 trường THPT chuyên

Môn: TOÁN

Đợt thi 31/3/2018-1/4/2018

Phần 1. Hàm số

<NB> Điểm nào sau đây không thuộc đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$?

<\$> (0;-1)

<\$> (1,-2)

<\$> (-1,2)

<\$> (2,7)

Lời giải:

Thay tọa độ các điểm thấy $(-1)^4 - 2x^2 - 1 = -2 \neq 2$ nên điểm $(-1,2)$ là đáp án cần tìm.

<NB> Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-		- 0 +	
$f(x)$		$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Diagram description: The table shows a function f(x) with a vertical asymptote at x=0. For x < 0, f(x) increases from $-\infty$ at $-\infty$ to $+\infty$ at 0. For x > 0, f(x) decreases from $+\infty$ at 0 to a local minimum at x=2 (y=2) and then increases to $+\infty$ at $+\infty$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

<\$> $(-\infty, 2)$

<\$> $(2, +\infty)$

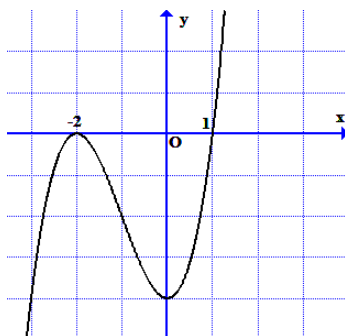
<\$> (0, 2)

<\$> $(0, +\infty)$

Lời giải:

Đáp án (0,2)

<NB> Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tìm số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(x) = 1$.

<\$> 0

<\$> 1

<\$> 2

<\$> 3

Lời giải:

Đáp án là 1.

<NB> Gọi x_1 là điểm cực đại, x_2 là điểm cực tiểu của hàm số. $y = -x^3 + 3x + 2$, Tính $x_1 + 2x_2$.

<\$> 1 <\$> 0 <\$> 2 <\$> -1

Lời giải:

$$y' = -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1, \quad y'' = -6x \text{ nên } y''(-1) > 0, y''(1) < 0.$$

Suy ra $x_1 = 1, x_2 = -1$. Do đó $x_1 + 2x_2 = -1$

<TH> Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{9x^2 + 6x + 4}}{x + 2}$.

<\$> $x = -2$ và $y = 3$;

<\$> $y = 3$ và $x = 2$;

<\$> $y = -3, y = 3$ và $x = -2$;

<\$> $x = -2$ và $y = -3$.

Lời giải:

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -2^-} y = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{|3x+2|}{x+2} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -2^+} y = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{|3x+2|}{x+2} = +\infty$ nên đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|3x+2|}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{|3x+2|}{|x|}}{\frac{x+2}{|x|}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left|3 + \frac{2}{x}\right|}{\frac{x}{|x|} + \frac{2}{|x|}} = \frac{3}{-1} = -3$ nên đường thẳng $y = -3$ là tiệm cận

ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|3x+2|}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{|3x+2|}{|x|}}{\frac{x+2}{|x|}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left|3 + \frac{2}{x}\right|}{\frac{x}{|x|} + \frac{2}{|x|}} = \frac{3}{1} = 3$ nên đường thẳng $y = 3$ là tiệm cận ngang

của đồ thị hàm số đã cho.

<VD> Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức

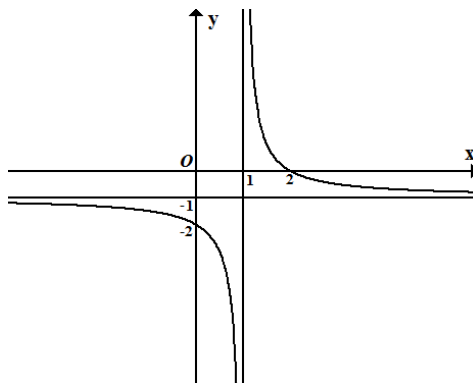
$T = a - 3b + 2c$?

<\$> $T = 12$.

<\$> $T = 10$.

<\$> $T = -9$.

<\$> $T = -7$.



Lời giải:

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(2, 0)$ nên $y(2) = 0$, ta

được $2a + b = 0$

Đồ thị hàm số nhận đường $x = 1$ làm tiệm cận

đứng nên

$c = -1$

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0, -2)$ nên $\frac{b}{c} = -2$ suy ra $b = 2$ và $a = -1$.

Vậy $a - 3b + 2c = -1 - 6 - 2 = -9$

<VD> Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = 4\sqrt{x^2 - 2x + 3} + 2x - x^2$. Tính tích các nghiệm của phương trình $f(x) = M$.

<A> -1

 1

<C> 0

<D> 2

Lời giải:

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$ thì $t \in [\sqrt{2}, +\infty)$. Khi đó $f(x) = g(t) = -t^2 + 4t + 3$ và $\text{Max } f(x) = \text{Max}_{t \in [\sqrt{2}, +\infty)} g(t)$

Lại có $g'(t) = -2t + 4$, lập bảng biến thiên $g(t)$ trên $[\sqrt{2}, +\infty)$ ta được $M = \text{Max}_{t \in [\sqrt{2}, +\infty)} g(t) = g(2)$, đạt được khi $t = 2$ nên $f(x) = M \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 3} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$. Tích hai nghiệm của phương trình này bằng -1

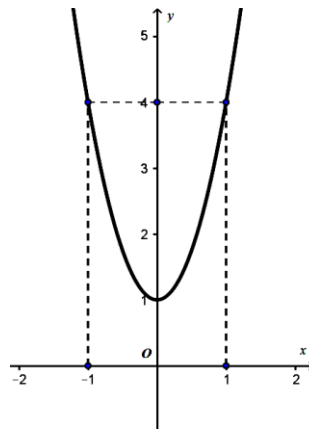
<VD> Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có đồ thị là (C) . Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ sau đây. Tính giá trị $H = f(4) - f(2)$?

<A> $H = 45$.

 $H = 64$.

<C> $H = 51$.

<D> $H = 58$.



Lời giải:

Nhận xét rằng đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nhận trục tung làm trục đối xứng nên $f'(x) = f'(-x) \forall x$, tức là $f'(x) = 3ax^2 + c$ hay $b = 0$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ đi qua điểm $(0, 1)$ và $(1, 4)$ nên ta có

$f'(0) = 1$ và $f'(1) = 4$ hay $c = 1$ và $a = 1$. Từ đó $f'(x) = 3x^2 + 1$.

Suy ra $f(x) = x^3 + x + m$, mà đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua gốc tọa độ nên $m = 0$.

Ta được $f(x) = x^3 + x$ nên $f(4) - f(2) = 58$. Vậy phương án đúng là 58

<VD> Cho hàm số $y = \frac{x^2 - |m|x + 4}{x - |m|}$. Biết rằng đồ thị hàm số có hai điểm cực trị phân biệt là A, B, .Tìm số giá trị m sao cho ba điểm A, B, C(4, 2) phân biệt và thẳng hàng.

<D>0 <D>1 <D>2 <D>3

Lời giải:

Ta có $y' = 1 - \frac{4}{(x - |m|)^2}$ nên đồ thị hàm số luôn có hai cực trị phân biệt A, B.

Phương trình đường thẳng AB là $y = 2x - |m|$ nên A, B, C(4, 2) thẳng hàng chỉ khi $|m| = 6$

Nhưng khi $|m| = 6$ thì C(4, 2) là một trong hai điểm cực trị, do đó không có giá trị m nào thỏa mãn đề bài.

<VDC> Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$, gọi d là tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng $m-2$. Biết đường thẳng d cắt tiệm cận đứng của đồ thị hàm số tại điểm $A(x_1, y_1)$ và cắt tiệm cận ngang của đồ thị hàm số tại điểm $B(x_2, y_2)$. Gọi S là tập hợp các số m sao cho $x_2 + y_1 = -5$. Tính tổng bình phương các phần tử của S.

<D>10 <D>0 <D>4 D.9

Lời giải:

Một tính chất quen thuộc là: M là trung điểm AB, vì $M(m-2, \frac{m-3}{m})$ nên ta được

$$x_1 + x_2 = 2(m-2); y_1 + y_2 = 2\frac{m-3}{m}.$$

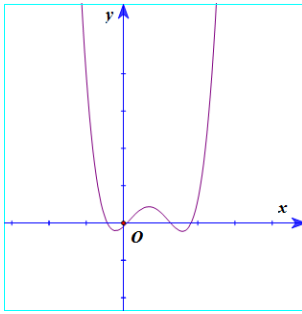
$$\text{Mặt khác } x_1 = -2, y_2 = 1 \text{ nên } x_2 + y_1 = 2m - 2 + 2\frac{m-3}{m} - 1 = -5$$

$$\Leftrightarrow m - 1 + 1 - \frac{3}{m} + 2 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0$$

Từ đó tập $S = \{1, -3\}$ nên đáp số thu được là 10.

<VDC>

Biết rằng đồ thị hàm số bậc 4: $y = f(x)$ được cho như hình vẽ bên



Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = g(x) = [f'(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x)$ và trục Ox.

<\$> 6.

<del\$> 0.

<\$> 4.

<\$> 2.

Lời giải:

Do đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt nên

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

Từ đó $f'(x) = f(x) \left(\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \frac{1}{x - x_3} + \frac{1}{x - x_4} \right)$ với mọi $x \notin \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ và $f'(x) \neq 0$ với mọi

$$x \in \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

Suy ra $h(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \left(\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \frac{1}{x - x_3} + \frac{1}{x - x_4} \right)$ với mọi $x \notin \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

Mặt khác $h'(x) = \frac{f''(x) \cdot f(x) - f'(x) \cdot f'(x)}{f^2(x)}$ và $h'(x) = \frac{-1}{(x - x_1)^2} + \frac{-1}{(x - x_2)^2} + \frac{-1}{(x - x_3)^2} + \frac{-1}{(x - x_4)^2} < 0$ với mọi

$$x \notin \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

Nên $f''(x) \cdot f(x) - [f'(x)]^2 \neq 0$ với mọi $x \notin \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

Mặt khác $f(x) = 0, f'(x) \neq 0$ với mọi $x \in \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

Nên phương trình đã cho vô nghiệm. Vậy đáp án là 0

Phần 2. Mũ và logarit

<NB> Tìm nghiệm của phương trình $2^x = 7$

<\$> $x = \log_7 2$

<del\$> $x = \log_2 7$

<\$> $x = \sqrt{7}$

<\$> $x = \frac{7}{2}$

Lời giải: Đáp án là $x = \log_2 7$

<NB> Hàm số nào sau đây là đạo hàm của hàm số $y = \log_2(x - 1)$

$$\text{< \$ >} y' = \frac{1}{2(x-1)} \quad \text{< \$ >} y' = \frac{\ln 2}{x-1}$$

$$\text{< \$ >} y' = \frac{1}{2(x-1) \cdot \ln 2}$$

$$\text{< \$ >} y' = \frac{1}{(x-1) \ln 2}$$

Lời giải: Đáp án là $y' = \frac{1}{(x-1) \ln 2}$

< TH > Cho a, b là 2 số thực khác 0. Biết $\left(\frac{1}{125}\right)^{a^2+4ab} = \left(\sqrt[3]{625}\right)^{3a^2-10ab}$. Tính tỉ số: $\frac{a}{b}$

$$\text{< \$ >} \frac{76}{3}$$

$$\text{< \$ >} \frac{4}{21}$$

$$\text{< \$ >} \frac{76}{21}$$

$$\text{< \$ >} 2$$

Lời giải:

Lấy logarit 2 về theo cơ số 5, ta được $(a^2 + 4ab)(-3) = (3a^2 - 10ab) \cdot \frac{4}{3}$

$$\Leftrightarrow -9(a + 4b) = 4(3a - 10b) \Leftrightarrow -21a = -4b.$$

Vậy $\frac{a}{b} = \frac{4}{21}$

< VDC > Cho bất phương trình $m \cdot 3^{x+1} + (3m+2) \cdot (4-\sqrt{7})^x + (4+\sqrt{7})^x > 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in (-\infty, 0)$.

$$\text{< \$ >} m > \frac{2-2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{< \$ >} m > \frac{2+2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{< \$ >} m \geq \frac{2-2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{< \$ >} m \geq -\frac{2-2\sqrt{3}}{3}.$$

Lời giải:

Nhận xét $(4-\sqrt{7})(4+\sqrt{7})=9$ nên bất phương trình đã cho thành

$$3m \cdot 3^x + (3m+2) \left(\frac{9}{4+\sqrt{7}}\right)^x + (4+\sqrt{7})^x > 0$$

$$\Leftrightarrow [(4+\sqrt{7})^x]^2 + 3m(4+\sqrt{7})^x \cdot 3^x + (3m+2) \cdot 9^x > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x\right]^2 + 3m \cdot \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x + 3m+2 > 0$$

Đặt $t = \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x$ thì $t \in (0,1)$ khi $x \in (-\infty, 0)$ và tương ứng $x \rightarrow t$ là 1-1. Bài toán thành: Tìm m để bất phương trình $t^2 + 3mt + 3m+2 > 0$ đúng với mọi $t \in (0,1)$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 + 2}{t + 1}$. Lập bảng biến thiên của $f(t)$ trên $(0,1)$ và dựa vào bảng biến thiên ta được

$$f(t) > -3m \forall t \in (0,1) \Leftrightarrow m > \frac{2 - 2\sqrt{3}}{3}$$

<VDC> Có bao nhiêu số nguyên dương n sao cho

$$S = 2 + (C_1^0 + C_2^0 + \dots + C_n^0) + (C_1^1 + C_2^1 + \dots + C_n^1) + \dots + (C_{n-1}^{n-1} + C_n^{n-1}) + C_n^n$$

là một số có 1000 chữ số?

<\$> 2

<\$> 1

<\$> 3

<\$> 0

Lời giải:

Chú ý $C_k^0 + C_k^1 + C_k^2 + \dots + C_k^k = (1+1)^k = 2^k$ nên $S = 1 + (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n) = 2^{n+1}$

S có 1000 chữ số khi và chỉ khi $10^{999} < S < 10^{1000}$

$$\Leftrightarrow 999 \log_2 10 < n+1 < 1000 \cdot \log_2 10 \Leftrightarrow 3319 \leq n+1 \leq 3321 \Leftrightarrow 3318 \leq n \leq 3320.$$

Vậy có 3 số nguyên dương n thỏa mãn

Phần 3. Nguyên hàm- Tích phân - Ứng dụng

<NB> Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a,b]$. Giả sử hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a,b]$ và $u(x) \in [\alpha, \beta] \forall x \in [a,b]$, hơn nữa $f(u)$ liên tục trên đoạn $[\alpha, \beta]$.

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

$$<$> \int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int_a^b f(u) du$$

$$<$> \int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du$$

$$<$> \int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int_a^b f(x) du$$

$$<$> \int_{u(a)}^{u(b)} f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int_a^b f(u) du$$

<NB> Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{(x+1)^2}$

$$<$> \int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{1}{x+1} + C$$

$$<$> \int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{-1}{x+1} + C$$

$$<$> \int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{2}{(x+1)^3} + C$$

$$<$> \int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{-2}{(x+1)^3} + C$$

<NB> Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx$

$$\text{<D> } I = 0 \quad \text{<D> } I = 1 \quad \text{<D> } I = \frac{\pi}{4} \quad \text{<D> } I = -1$$

<D> Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sin x, y = \cos x, x = 0, x = a$ (với $a \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$)

là $\frac{1}{2}(-3 + 4\sqrt{2} - \sqrt{3})$. Hỏi số a thuộc khoảng nào sau đây?

$$\text{<D> } (\frac{7}{10}, 1) \quad \text{<D> } (1, \frac{51}{50}) \quad \text{<D> } (\frac{51}{50}, \frac{11}{10}) \quad \text{<D> } (\frac{11}{10}, \frac{3}{2}).$$

<D> Cho $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ trên $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $xf'(x)$ thỏa mãn $F(0) = 0$. Biết

$a \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ thỏa mãn $\tan a = 3$. Tính $F(a) - 10a^2 + 3a$.

$$\text{<D> } \ln 10 \quad \text{<D> } \frac{1}{2} \ln 10 \quad \text{<D> } -\frac{1}{2} \ln 10 \quad \text{<D> } -\frac{1}{4} \ln 10$$

Lời giải:

$$\text{Ta có } \int x.f'(x)dx = \int x.d(f(x)) = x.f(x) - \int f(x)dx$$

$$\text{Mà } \int f(x)dx = \int x d(\tan x) = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x + \ln |\cos x| + C$$

$$\text{Vậy } \int x.f'(x)dx = x.f(x) - x \tan x - \ln |\cos x| + C.$$

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của $xf'(x)$ thỏa mãn $F(0) = 0$ nên $F(x) = \frac{x^2}{\cos^2 x} - x \tan x + \ln |\cos x|$. Vì

$$\tan a = 3 \text{ nên } \frac{1}{\cos^2 a} = 10. \text{ Từ đó } F(a) - 10a^2 + 3a = -\ln \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{2} \ln 10$$

<D> Cho số thực $a > 0$. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0; a]$ thỏa mãn

$$f(x).f(a-x) = 1 \quad \forall x \in [0, a]. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^a \frac{1}{1+f(x)} dx ?$$

$$\text{<D> } I = \frac{2a}{3} \quad \text{<D> } I = \frac{a}{2}. \quad \text{<D> } I = \frac{a}{3}. \quad \text{<D> } I = a.$$

Lời giải:

$$\text{Đặt } t = a - x \text{ thì } I = \int_a^0 \frac{1}{1+f(a-t)} (-dt) = \int_0^a \frac{1}{1+\frac{1}{f(t)}} dt = \int_0^a \frac{f(t)}{1+f(t)} dt = \int_0^a \frac{f(t)}{1+f(t)} dt$$

Từ đó $I + I = \int_0^a dx = a$ nên $I = \frac{a}{2}$

<VDC> Cho $I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx} dx}{1+e^{-x}}, n \in \mathbb{N}$. Đặt $u_n = 1.(I_1 + I_2) + 2(I_2 + I_3) + 3(I_3 + I_4) + \dots + n(I_n + I_{n+1}) - n$. Biết $\lim u_n = L$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

<S> $L \in (-1, 0)$ <S> $L \in (0, 1)$ <S> $L \in (-2, -1)$ <S> $L \in (1, 2)$.

Lời giải:

Ta có $I_n + I_{n-1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx} + e^{-(n-1)x}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 e^{-(n-1)x} dx = -\frac{1}{n-1} e^{-(n-1)x} \Big|_0^1 = -\frac{1}{n-1} (e^{-(n-1)} - 1)$.

Vậy $(n-1)(I_{n-1} + I_n) = 1 - \frac{1}{e^{n-1}}$. Suy ra $u_n = -[\left(\frac{1}{e}\right)^n + \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1} + \dots + \left(\frac{1}{e}\right)]$ nên $-u_n = \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{e} - 1} - 1$.

Ta được $\lim u_n = \frac{1}{1-e}$ nên $L \in (-1, 0)$

Phần 4. Số phức

<NB> Cho hai số phức $z_1 = 2 + 3i, z_2 = -4 - 5i$. Số phức $z = z_1 + z_2$ là:

<S> $z = 2 + 2i$. <S> $z = -2 - 2i$. <S> $z = 2 - 2i$. <S> $z = -2 + 2i$.

Lời giải: $z_1 + z_2 = 2 - 4 + (3 - 5)i = -2 - 2i$

<TH> Nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 - z + 1 = 0$ là $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$.

Tính $a + \sqrt{3}b$

<S> 2 <S> 1 <S> -1 <S> -2

Lời giải: $a = \frac{1}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ nên $a + \sqrt{3}b = 2$

<VDC> Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 2, |z_2| = \sqrt{3}$. Gọi M, N là các điểm biểu diễn cho z_1 và iz_2 . Biết $\angle MON = 30^\circ$. Tính $S = |z_1^2 + 4z_2^2|$

<S> $\sqrt{5}$ <S> $4\sqrt{7}$ <S> $3\sqrt{3}$ <S> $5\sqrt{2}$

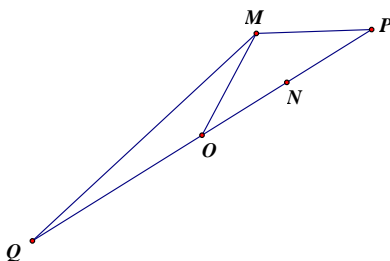
Lời giải:

Đặt $z_3 = iz_2$ thì $z_3^2 = (iz_2)^2 = -z_2^2$ nên $|z_1^2 + 4z_2^2| = |z_1^2 - 4z_3^2|$

Từ đó $S = |z_1 - 2z_3| |z_1 + 2z_3|$

Ta có M, N biểu diễn cho z_1 và z_3 nên $OM=2$, $ON=\sqrt{3}$

Gọi P là điểm biểu diễn $2z_3$ cho và Q là điểm biểu diễn cho $-2z_3$ thì N trung điểm OP và Q đối xứng P qua O.



Hơn nữa: $S = MP \cdot MQ$

Lại có sử dụng định lý cosin cho tam giác MOP và MOQ ta được $MP = 2$ và $MQ = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

Từ đó $S = 4\sqrt{7}$

<VDC> Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 1 - i| = 2$ và $z_2 = iz_1$. Tìm giá trị lớn nhất m của biểu thức $|z_1 - z_2|$?

<\$> $m = \sqrt{2} + 1$.

<\$> $m = 2\sqrt{2}$.

<\$> $m = 2$.

<\$> $m = 2\sqrt{2} + 2$.

Lời giải:

Ta có $|z_1 - z_2| = |z_1 - iz_1| = |1 - i| |z_1| = \sqrt{2} |z_1|$.

Đặt $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$ thì ta có $(a+1)^2 + (b-1)^2 = 4$. Cần tìm giá trị nhỏ nhất của $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Đặt $t = a^2 + b^2$, ta có $a^2 + b^2 + 2a - 2b = 2$ nên $2(a-b) = 2-t$.

Mà $(a-b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ nên $(2-t)^2 = 4(a-b)^2 \leq 8t \Leftrightarrow t^2 - 12t + 4 \leq 0$.

Dấu bằng đạt được khi $a = -b$

Từ đó $t \leq 6 + 4\sqrt{2}$ nên $|z_1| \leq 2 + \sqrt{2}$.

Vậy $|z_1 - z_2| \leq \sqrt{2}(2 + \sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2}$. Vậy $m = 2\sqrt{2} + 2$.

Phần 5. Đa diện và thể tích khối đa diện: 2 câu

<NB> Trong tất cả các loại hình đa diện đều sau đây, hình nào có số mặt nhiều nhất?

<\$> Loại {3,5}

<\$> Loại {5,3}

<\$> Loại {4,3}

<\$> Loại {3,4}

<VDC> Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A , cạnh $BC = a\sqrt{6}$. Góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 60° . Tính thể tích V của khối đa diện $AB'CA'C'$.

<\$> $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$

<\$> $a^3\sqrt{3}$

<\$> $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

<\$> $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Lời giải:

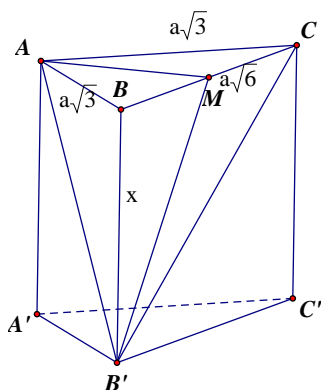
Gọi M là trung điểm BC thì AM vuông góc $(BCC'B')$ nên tam giác $MB'C$ là hình chiếu tam giác $AB'C$ trên $(BCC'B')$. Đặt $AA' = x$ thì

$$S_{MB'C} = \frac{1}{2}x.BC = \frac{1}{4}x.a\sqrt{6}.$$

Do $AC \perp (ABB'A')$ nên $AC \perp AB'$

$$AB' = \sqrt{x^2 + 3a^2}, AC = a\sqrt{3} \text{ nên}$$

$$S_{AB'C} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}\sqrt{x^2 + 3a^2}$$



$$\text{Lại có } \frac{1}{2} = \cos 60^\circ = \frac{S_{MB'C}}{S_{AB'C}} = \frac{\frac{1}{4}x.a\sqrt{6}}{\frac{1}{2}a\sqrt{3}\sqrt{x^2 + 3a^2}}$$

$$= \frac{x\sqrt{2}}{2\sqrt{x^2 + 3a^2}} \text{ hay } x = a\sqrt{3}$$

Từ đó thể tích khối lăng trụ đã cho là $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$ nên thể tích đa diện cần tính bằng $\frac{2}{3}V = a^3\sqrt{3}$

Phần 6. Trụ-nón-cầu : 2 câu

<TH> Cắt hình nón bởi một mặt phẳng đi qua trục ta được thiết diện là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{6}$. Thể tích V của khối nón đó bằng:

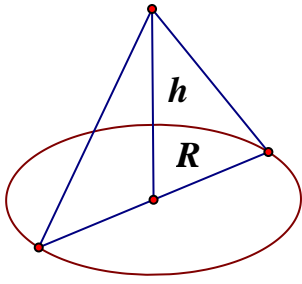
<\$> $V = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{4}$

<\$> $V = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{3}$

<\$> $V = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{6}$

<\$> $V = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{2}$

Lời giải:



Chiều cao nón $h = \frac{1}{2}a\sqrt{6}$ và bán kính đáy

$R = h$ nên

$$V = \frac{1}{3}h.\pi.R^2 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^3 = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{4}$$

<VD> Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau theo giao tuyến Δ . Trên đường Δ lấy hai điểm A, B với $AB = a$. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C và trong mặt phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với Δ và $AC = BD = AB$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD là:

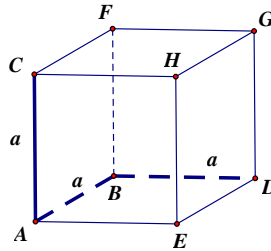
<\$> $a\sqrt{3}$

<\$> $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$

<\$> $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

\$> $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Lời giải:



Dựng hình bình hành ABDE, AEHC, ACFB, CFGH như hình vẽ, ta được ABDE là hình vuông, ACBF là hình vuông. Do (P) vuông góc (Q) nên ACHE là hình vuông. Vậy, ta được hình lập phương ABDE.CFGH

Nên bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD chính là bán kính mặt cầu ngoại tiếp lập phương và bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Phần 7. Phương pháp tọa độ trong không gian: 8 câu

<NB> Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2, -1, 1)$. Vectơ nào sau đây cũng là vectơ pháp tuyến của (P)?

<\$> $(-2, 1, 1)$

\$> $(4, -2, 2)$

<\$> $(4, 2, -2)$

<\$> $(-4, 2, 3)$

<NB> Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho vectơ $\vec{u} = (x, 2, 1)$ và vectơ $\vec{v} = (1, -1, 2x)$. Tính tích vô hướng của \vec{u} và \vec{v}

\$> $3x - 2$

<\$> $3x + 2$

<\$> $-2 - x$

<\$> $x + 2$

<NB> Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, viết phương trình chính tắc của mặt cầu có đường kính AB với $A(2, 1, 0), B(0, 1, 2)$

$$\text{<S> } (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2$$

$$\text{<S> } (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$$

$$\text{<S> } (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 2$$

$$\text{<S> } (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 4$$

<TH> Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(1; 2; 3) và mặt phẳng (P): $2x + y - 4z + 1 = 0$. Đường thẳng (d) qua điểm A, song song với mặt phẳng (P), đồng thời cắt trục Oz. Phương trình tham số của đường thẳng (d) là ?

$$\text{<S> } \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 6t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

$$\text{<S> } \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2 - 6t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

$$\text{<S> } \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

$$\text{<S> } \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Lời giải:

Giả sử d cắt Oz tại M(0,0,m). Ta có $\overrightarrow{MA} = (1, 2, 3 - m)$, đường thẳng d song song mặt phẳng (P) nên $\overrightarrow{MA} \cdot \vec{n} = 0$ với $\vec{n} = (2, 1, -4)$ là VTPT của (P).

Ta được $2 + 2 - 4(3 - m) = 0 \Leftrightarrow 4m - 8 = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

Từ đó $\overrightarrow{MA} = (1, 2, 1)$ nên đường thẳng d qua M(0,0,2) nhận \overrightarrow{MA} làm vectơ chỉ phương là d:
$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

<TH> Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz có bao nhiêu mặt phẳng song song mặt phẳng (Q): $x + y + z + 3 = 0$, cách điểm M(3,2,1) một khoảng bằng $3\sqrt{3}$ biết rằng tồn tại một điểm $X(a, b, c)$ trên mặt phẳng đó thỏa mãn $a + b + c < -2$?

\$. 0

\$\$. 1

\$\$. 2

\$\$. Vô số

Lời giải:

(P) song song (Q) nên có phương trình $x + y + z + m = 0$ với $m \neq 3$

$$\text{Mặt khác } d_{M,(P)} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|6 + m|}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$$

Ta được $m = 3$ hoặc $m = -15$. Nhưng $m \neq 3$ và một điểm bất kỳ trên (P) đều có tổng các tọa độ bằng 15 nên không có mặt phẳng nào thỏa mãn.

Đáp số: 0

<VD> Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{3}; d_2: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=m \end{cases}$.
Gọi S là tập tất cả các số m sao cho d_1 và d_2 chéo nhau và khoảng cách giữa chúng bằng $\frac{5}{\sqrt{19}}$. Tính tổng các phần tử của S.

<\$> 11

<\$> 12

<\$> -12

<\$> -11

Lời giải:

Ta có vectơ chỉ phương của d_1, d_2 là $\vec{u}_1 = (2, 1, 3); \vec{u}_2 = (1, 1, 0)$. Đặt $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2]$ thì $\vec{n} = (-3, 3, 1)$

Mặt phẳng (P) chứa d_1 , song song hoặc chứa d_2 , đi qua điểm A(1,0,0) trên d_1 và có VTPT \vec{n} , có phương trình $-3(x-1) + 3(y-0) + 1(z-0) = 0 \Leftrightarrow 3x - 3y - z - 3 = 0$

Xét điểm $B(1, 2, m)$ thuộc d_2 . Khi đó d_1 và d_2 chéo nhau, có khoảng cách $\frac{5}{\sqrt{19}}$ khi

$$d_{B,(P)} = \frac{5}{\sqrt{19}} \Leftrightarrow \frac{|3-6-m-3|}{\sqrt{19}} = \frac{5}{\sqrt{19}}$$

$$\Leftrightarrow |m+6| = 5 \Leftrightarrow m = -1 \text{ hoặc } m = -11.$$

Đáp số thu được là -12

<VD> Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$ với $a, b, c > 0$.

Biết rằng (ABC) đi qua điểm $M(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7})$ và tiếp xúc với mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{72}{7}$.

Tính $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

<\$> $\frac{1}{7}$

<\$> $\frac{7}{2}$

<\$> 7

<\$> 14

Lời giải:

Phương trình (ABC): $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Do M thuộc mặt phẳng (ABC) nên $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 7$.

Khoảng cách từ tâm $I(1, 2, 3)$ của mặt cầu (S) đến (ABC) bằng bán kính $R = \sqrt{\frac{72}{7}}$ nên

$$\frac{|\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} - 1|}{\sqrt{(\frac{1}{a})^2 + (\frac{1}{b})^2 + (\frac{1}{c})^2}} = \sqrt{\frac{72}{7}} \Leftrightarrow (\frac{1}{a})^2 + (\frac{1}{b})^2 + (\frac{1}{c})^2 = \frac{7}{2}$$

<VDC> Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng Δ đi qua gốc tọa độ O và điểm $I(0,1,1)$. Gọi S là tập hợp các điểm nằm trên mặt phẳng (Oxy), cách đường thẳng Δ một khoảng bằng 6. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi S.

<\$> $18\sqrt{2}\pi$ <\$> $36\sqrt{2}\pi$ <\$> 18π <\$> 36π

Lời giải:

Cách 1. Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (0,1,1)$ và đi qua gốc $O(0,0,0)$.

Gọi $M(a,b,0)$ là điểm thuộc (Oxy), cách Δ một khoảng bằng 6.

Ta có $d_{M,\Delta} = \frac{|[\overrightarrow{OM}, \vec{u}]|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{b^2 + 2a^2}}{\sqrt{2}}$. Vậy ta được $2a^2 + b^2 = 72 \Leftrightarrow \frac{a^2}{36} + \frac{b^2}{72} = 1$.

Như vậy tập hợp các điểm M chính là elip (E) trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), có phương trình

$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{72} = 1$, nên có các bán trục là 6 và $6\sqrt{2}$, có diện tích bằng $\pi \cdot 6 \cdot 6\sqrt{2} = 36\sqrt{2}\pi$

Lớp 11

Phần 1. Lượng giác: 1 câu

<VDC> Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |\sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}|$

<\$> $2\sqrt{2}-1$ <\$> $2\sqrt{2}+1$ <\$> $\sqrt{2}+1$ <\$> $\sqrt{2}-1$

Lời giải:

Đặt $a = \sin x, b = \cos x$ thì $|\sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}| = |a + b + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}| = P$

Ta được $P = |\frac{ab(a+b) + a^2 + b^2 + a + b}{ab}| = |\frac{ab(a+b) + a + b + 1}{ab}|$ do $a^2 + b^2 = 1$.

Đặt $a + b = t$ thì $P = |\frac{2ab(a+b) + 2(a+b) + 2}{2ab}| = |t - 1 + \frac{2}{t-1} + 1|$

Với $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

+) Với $t - 1 > 0$ thì áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $P = t - 1 + \frac{2}{t-1} + 1 \geq 2\sqrt{2} + 1$

+) Với $t - 1 < 0$ thì áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có $1 - t + \frac{2}{1-t} \geq 2\sqrt{2}$ nên

$$t-1+\frac{2}{t-1}\leq -2\sqrt{2} \text{ nên } t-1+\frac{2}{t-1}+1\leq 1-2\sqrt{2}$$

Từ đó $P\geq 2\sqrt{2}-1$.

Dấu bằng đạt được khi $t=1-\sqrt{2}$, hay $\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ nên tồn tại x.

Vậy đáp số là: $2\sqrt{2}-1$

Phần 2. Tổ hợp- Xác suất- Nhị thức: 4 câu

<NB> Tìm hệ số của x^7 khi khai triển: $P(x)=(x+1)^{20}$

<S> C_{20}^7

<S> A_{20}^7

<S> P_7

<S> A_{20}^{13}

<TH> Cho số tự nhiên n thỏa mãn $C_n^2 + A_n^2 = 9n$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

<S> n chia hết cho 5

<S> n chia hết cho 3

<S> n chia hết cho 7

<S> n chia hết cho 2

Lời giải:

Phương trình đã cho $\frac{n(n-1)}{2} + n(n-1) = 9n \Leftrightarrow 3(n-1) = 18 \Leftrightarrow n = 7$

<VDC> Trước kỳ thi học kỳ 2 của lớp 11 tại trường FIVE, giáo viên Toán lớp FIVE A giao cho học sinh đề cương ôn tập gồm có $2n$ bài toán, n là số nguyên dương lớn hơn 1. Đề thi học kỳ của lớp FIVE A sẽ gồm 3 bài toán được chọn ngẫu nhiên trong số $2n$ bài toán đó. Một học sinh muốn không phải thi lại, sẽ phải làm được ít nhất 2 trong số 3 bài toán đó. Học sinh TWO chỉ giải chính xác được đúng 1 nửa số bài trong đề cương trước khi đi thi, nửa còn lại học sinh đó không thể giải được. Tính xác suất để TWO không phải thi lại.

<S> $\frac{1}{2}$

<S> $\frac{2}{3}$

<S> $\frac{1}{3}$

<S> $\frac{3}{4}$

Lời giải: Gọi X là tập các bài mà TWO đã giải được chính xác, Y là tập các bài còn lại.

Gọi A_i là biến cố: TWO giải được đúng i bài trong số 3 bài được chọn vào đề, $i=0,1,2,3$

Biến cố A là biến cố: học sinh TWO không phải thi lại thì $A = A_2 \cup A_3$

Cách 1.

Mặt khác, TWO giải được đúng 1 nửa số bài nên $P(A_0) = P(A_3)$ và $P(A_1) = P(A_2)$

(vì $n(X) = n(Y)$ và $P(A_0)$ là xác suất 3 bài được chọn thuộc Y, $P(A_3)$ là xác suất 3 bài được chọn thuộc X; $P(A_1)$ là xác suất để 1 bài được chọn thuộc X và $P(A_2)$ là xác suất để 1 bài được chọn thuộc Y)

Mà $P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$ nên $P(A_2) + P(A_3) = \frac{1}{2}$

Vậy xác suất của biến cố A là $P(A) = P(A_2) + P(A_3) = \frac{1}{2}$

Cách 2.

A_2 xảy ra khi đề thi có 2 câu trong X và 1 câu trong Y nên $P(A_2) = \frac{C_n^2 \cdot C_n^1}{C_{2n}^3}$

A_3 xảy ra khi đề thi có 3 câu trong X và 0 câu nào trong Y nên

$$P(A_3) = \frac{C_n^3}{C_{2n}^3}$$

Vậy $P(A) = P(A_2) + P(A_3) = \frac{1}{2}$

<VDC> Từ các chữ số $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ viết ngẫu nhiên một số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau có dạng $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6}$. Xác suất để viết được số thỏa mãn điều kiện $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6$ là:

$$<\$> p = \frac{4}{85}$$

$$<\$> p = \frac{4}{135}$$

$$<\$> p = \frac{3}{20}$$

$$<\$> p = \frac{5}{158}$$

Lời giải:

Ta có $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 3(a_1 + a_2)$ là số chia hết cho 3. Mà $0+1+2+3+4+5+6=21$ cũng là số chia hết cho 3 nên số duy nhất trong 7 số $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ không xuất hiện trong số lập được là số chia hết cho 3. Vậy có 3 trường hợp

Trường hợp (1). $\{a_1, a_2, \dots, a_6\} = \{1, 2, 4, 4, 5, 6\}$. Khi đó $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6 = 7$ nên

$$\{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4\}, \{a_5, a_6\} = \{\{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}\}$$

Có 3! cách xếp các cặp $\{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}$ vào các vị trí của $\{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4\}, \{a_5, a_6\}$, trong mỗi cặp vị trí lại có 2 cách xếp nên có 3!. $2^3 = 48$ cách.

Ta thu được 48 số kiểu này

Trường hợp (2) $\{a_1, a_2, \dots, a_6\} = \{0, 1, 2, 4, 5, 6\}$ thì $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6 = 6$ nên

$$\{\{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4\}, \{a_5, a_6\}\} = \{\{0, 6\}, \{2, 4\}, \{1, 5\}\}$$

Tương tự như trên nếu coi số 0 bình đẳng, ta có 48 số.

Tuy nhiên, khi số 0 đứng đầu, số đó có dạng $\overline{06a_3a_4a_5a_6}$ với lập luận tương tự, có $2.2.2 = 8$ số mà số 0 đứng đầu. Như thế, có 40 số trong trường hợp này

Trường hợp (3). $\{a_1, a_2, \dots, a_6\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Tương tự trường hợp 2, có 40 số như thế.

Vậy có $48 + 40 + 40 = 128$ số

Mặt khác có $6.A_6^5 = 6.720 = 4320$ nên xác suất thu được là $\frac{128}{4320} = \frac{4}{135}$

Phần 3. Dãy số- Cấp số: 1 câu

<TH> Cho 3 số a, b, c theo thứ tự đó tạo thành cấp số nhân với công bội khác 1. Biết cũng theo thứ tự đó chúng lần lượt là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng công sai là $s \neq 0$ Tính $\frac{a}{s}$

$$\langle \$ \rangle \quad \frac{4}{9} \quad \langle \$ \rangle \quad T = \frac{4}{3}. \quad \langle \$ \rangle \quad T = 9 \quad \langle \$ \rangle \quad T = 3$$

Lời giải:

Rõ ràng $a \neq 0$. Vì s là công sai cấp số cộng đã cho nên $a, a+3s, a+7s$ lập thành cấp số nhân, suy ra $a(a+7s) = (a+3s)^2$ hay

$$a^2 + 7as = a^2 + 6as + 9s^2 \Leftrightarrow as = 9s^2 \Leftrightarrow s = 0 \text{ (loại) hoặc } a = 9s$$

Vậy $a = 9s$.

Phần 4. Giới hạn: 1 câu

<TH> Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 3}}{3x + 2}$

$$\langle \$ \rangle \quad \frac{2}{3} \quad \langle \$ \rangle \quad -\frac{2}{3} \quad \langle \$ \rangle \quad \frac{1}{3} \quad \langle \$ \rangle \quad -\frac{1}{3}$$

Phần 5. Quan hệ song song, vuông góc trong không gian: 4 câu

<TH> Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , I là trung điểm cạnh SC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

<\$> Đường thẳng IO song song với mặt phẳng (SAB)

<\$> Đường thẳng IO song song mặt phẳng (SAD)

<\$> Mặt phẳng (IBD) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là một tứ giác.

<\$> Giao tuyến của hai mặt phẳng (IBD) và (SAC) là IO.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \left. \begin{array}{l} OI // SA \\ OI \not\subset (SAB) \end{array} \right\} \Rightarrow OI // (SAB).$$

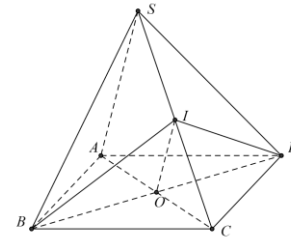
$$\text{Ta có: } \left. \begin{array}{l} OI // SA \\ OI \not\subset (SAD) \end{array} \right\} \Rightarrow OI // (SAD).$$

Ta có: (IBD) cắt hình chóp theo thiết diện là tam giác IBD

Ta có: (IBD) ∩ (SAC) = IO nên

đáp án: Câu sai là

“Mặt phẳng (IBD) cắt hình chóp S.ABCD theo thiết diện là một tứ giác.”



<VD> Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB = 2a, BC = a$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng đáy là trung điểm của cạnh AB, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 60° . Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SB và AC.

<\$> $\frac{2}{\sqrt{35}}$

<\$> $\frac{2}{\sqrt{5}}$

<\$> $\frac{2}{\sqrt{7}}$

<\$> $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } HC = \sqrt{BH^2 + BC^2} = a\sqrt{2}.$$

$$SH = HC \cdot \tan SCH = a\sqrt{2} \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{6}.$$

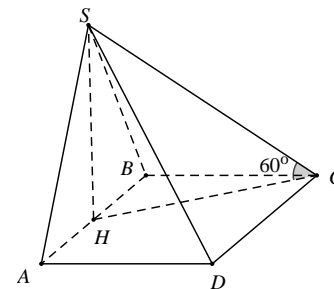
$$AC = \sqrt{BA^2 + BC^2} = a\sqrt{5}, SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = a\sqrt{7}.$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{SH} + \overrightarrow{HB}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \cos BAC$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \frac{AB}{AC} = 2a^2.$$

$$SB \cdot AC = a\sqrt{7} \cdot a\sqrt{5} = a^2\sqrt{35}.$$

$$\Rightarrow \cos(SB, AC) = \frac{\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC}}{SB \cdot AC} = \frac{2}{\sqrt{35}}$$



<VDC> Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABCD) bằng 45° . Gọi M là trung điểm của SD. Tính theo a khoảng cách d từ điểm M đến mặt phẳng (SAC).

$$\langle \$ \rangle \quad d = \frac{a\sqrt{1315}}{89}$$

$$\langle \$ \rangle \quad d = \frac{a\sqrt{1513}}{89}$$

$$\langle \$ \rangle \quad d = \frac{2a\sqrt{1315}}{89}$$

$$\langle \$ \rangle \quad d = \frac{2a\sqrt{1513}}{89}$$

Lời giải:

Để thấy: $\angle SCH = 45^\circ$.

Gọi H là trung điểm của AB ta có $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

$$\text{Ta có: } SH = HC = \frac{a\sqrt{17}}{2}.$$

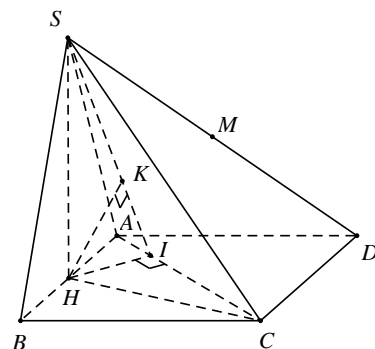
$$\text{Ta có: } d = d(M, (SAC)) = \frac{1}{2} d(D, (SAC)).$$

$$\text{Mà } \frac{1}{2} d(D, (SAC)) = \frac{1}{2} d(B, (SAC)) \text{ nên } d = d(H, (SAC)).$$

$$\text{Kẻ } HI \perp AC, HK \perp SI \Rightarrow d(H, (SAC)) = HK.$$

$$\text{Ta có: } HI = \frac{AB \cdot AD}{2AC} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Từ đó suy ra: } d = HK = \frac{SH \cdot HI}{SI} = \frac{a\sqrt{1513}}{89}.$$



<VDC> Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Dựng mặt phẳng (P) cách đều năm điểm A, B, C, D và S . Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng (P) như vậy.

$\langle \$ \rangle$ 1 mặt phẳng; $\langle \$ \rangle$ 2 mặt phẳng; $\langle \$ \rangle$ 4 mặt phẳng; $\langle \$ \rangle$ 5 mặt phẳng.

Lời giải

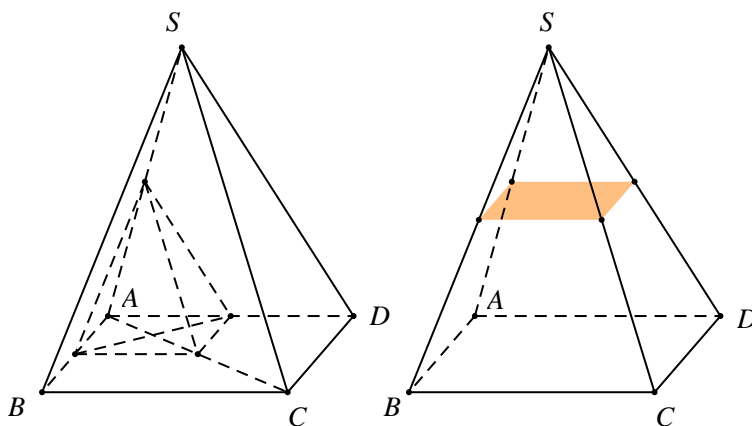
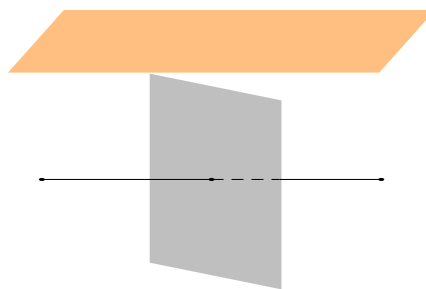
Lời giải:

- Một mặt phẳng cách đều hai điểm (ta hiểu rằng trong trường hợp này khoảng cách từ hai điểm tới mặt phẳng lớn hơn 0) khi nó song song với đường thẳng đi qua hai điểm đó hoặc cắt đường thẳng đi qua hai điểm đó tại trung điểm của chúng.

Trở lại bài toán rõ ràng cả năm điểm A, B, C, D và S không thể nằm cùng phía với mặt phẳng (P) . Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1:** Có một điểm nằm khác phía với bốn điểm còn lại.

Nếu điểm này là điểm S thì mặt phẳng (P) phải đi qua trung điểm của SA, SB, SC, SD và đây là mặt phẳng đầu tiên mà ta xác định được. Nếu điểm này là điểm A thì mặt phẳng (P) phải đi qua trung điểm của các cạnh AS, AB, AC, AD . Không thể xác định mặt phẳng (P) như vậy vì 4 điểm đó tạo thành một tứ diện. Tương tự như vậy điểm này

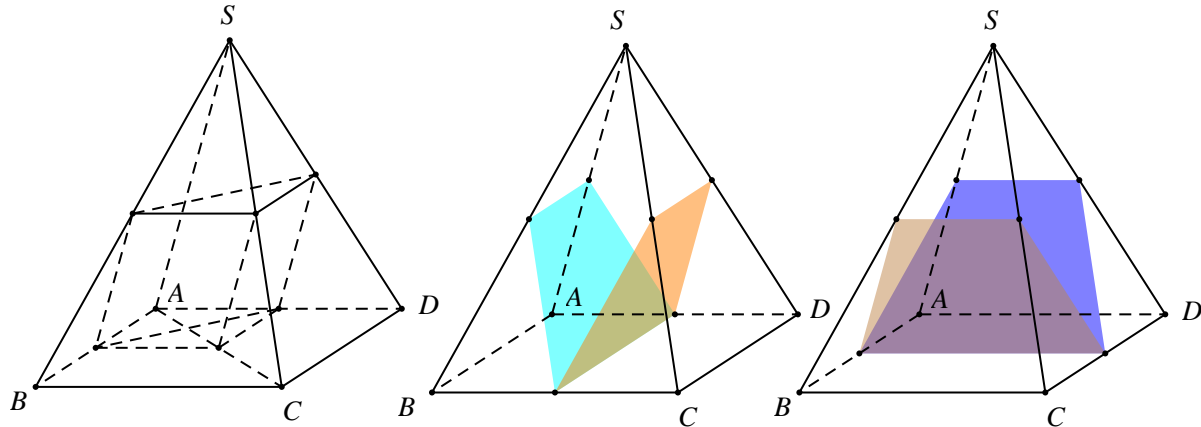


không thể là B, C, D .

- **Trường hợp 2:** Có hai điểm nằm khác phía so với ba điểm còn lại.

Nếu hai điểm này là A và S thì mặt phẳng (P) phải đi qua trung điểm của các cạnh AB, AC, AD, SB, SC, SD . Không thể xác định mặt phẳng (P) vì sáu điểm này tạo thành một lăng trụ. Tương tự như vậy hai điểm này không thể là các cặp B và S, C và S, D và S .

Nếu hai điểm này là A và B, A và D, B và C, B và D, C và D thì mỗi trường hợp ta xác định được một mặt phẳng.



Như vậy ta xác định được 5 mặt phẳng (P) .